Caatinga, 4(1/2):86-90, 1984

ESTIMATIVAS PARA OS PARÂMETROS DA EQUAÇÃO DE VON BERTALANFFY, NO CASO DE PEIXES[1]

MARGLEY MACHADO DE MOURA

Professor Assistente, Escola Superior de Agricultura de Mossoró

SINOPSE - Na literatura científica existem vários métodos que dão boas estimativas para os parâmetros que aparecem na equação de von Bertalanffy, utilizada para o estudo do crescimento em comprimento, em uma população. No presente trabalho, apresentamos um modelo matemático, em função dos comprimentos tomados em épocas diferentes de mensuração, para estimar os referidos parâmetros, no caso particular de peixes.

INTRODUÇÃO

De acordo com Von BERTALANFFY (1938), a equação que representa o crescimento em comprimento de uma população de indivíduos, numa certa época, é

$$\ell(t) = \ell_\infty \left(1 - e^{-k(t - t_0)}\right), \qquad (1)$$

onde ℓ_∞ é o comprimento total máximo assintótico, k a constante relacionada com o crescimento do animal e t_0 o parâmetro relacionado com o comprimento do animal ao nascer.

Ao nascerem, os peixes têm comprimento desprezível. Por esta razão tomamos $t_0 = 0$ na equação (1) e, por conseguinte, esta se reduz a

$$\ell(t) = \ell_\infty \left(1 - e^{-kt}\right), \qquad (2)$$

que é a equação que usaremos para o estudo do crescimento em comprimento de peixes.

Já que ℓ_∞, k e e^{-kt} só assumem valores positivos, a derivada de (2),

$$\ell'(t) = \ell_\infty k e^{-kt},$$

é positiva. Isto significa dizer que o crescimento em comprimento dos peixes aumenta com a idade, não atingindo um máximo.

A curva que representa o crescimento em comprimento, (curva de crescimento) de peixes tem o aspecto ilustrado na figura 1.

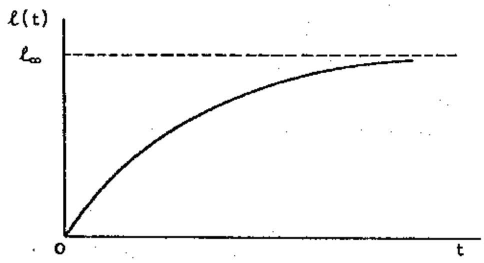

fig. 1 - curva de crescimento

ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS

No modelo matemático que apresentamos para estimar os parâmetros ℓ_∞, k e t_p (este último a idade média na época da primeira mensuração) da equação (2), estamos supondo que o intervalo Δt, entre duas medidas, é constante (SANTOS, 1978). Assim, seja $\ell(t)$ o comprimento numa certa

[1] Recebido para publicação em 30.11.1984.

época de medida e $\ell(t + \Delta t)$ o comprimento na época seguinte. Por definição

$$\ell(t) = \ell_\infty(1 - e^{-kt})$$

e

$$\ell(t + \Delta t) = \ell_\infty(1 - e^{-k(t + \Delta t)}).$$

Daí, é fácil ver que

$$\ell(t + \Delta t) = m\ell(t) + n, \qquad (3)$$

onde

$$m = e^{-kt} \quad e \quad n = \ell_\infty (1 - e^{-k\Delta t}).$$

A equação (3) está na forma inclinação-interseção de uma equação de reta. Por esta razão, a equação von Bertalanffy é válida para a população em estudo, se os pontos $(\ell(t), \ell(t + \Delta t)) \in \mathbb{R}^2$ se dispuserem em linha reta. Se este é o caso e t, $t + \Delta t$ e $t + 2\Delta t$ são três épocas distintas de mensuração, temos os seguintes comprimentos médios

$$\bar{\ell}(t) = \ell_\infty(1 - e^{-kt}), \qquad (4)$$

$$\bar{\ell}(t + \Delta t) = \ell_\infty(1 - e^{-k(t + \Delta t)}) \qquad (5)$$

e

$$\bar{\ell}(t + 2\Delta t) = \ell_\infty(1 - e^{-k(t + 2\Delta t)}). \qquad (6)$$

As equações acima podem ser reescritas na forma equivalente

$$\bar{\ell}(t) = \ell_\infty - \ell_\infty e^{-kt} \qquad (4)'$$

$$\bar{\ell}(t + \Delta t) = \ell_\infty - \ell_\infty e^{-k(t + \Delta t)} \qquad (5)'$$

e

$$\bar{\ell}(t + 2\Delta t) = \ell_\infty - \ell_\infty e^{-k(t + 2\Delta t)}, \qquad (6)'$$

respectivamente.

Subtraindo (4)' de (5)' e (5)' de (6)' obtemos o sistema de equações

$$\bar{\ell}(t + \Delta t) - \bar{\ell}(t) = \ell_\infty e^{-kt}(1 - e^{-k\Delta t}) \qquad (7)$$

$$\bar{\ell}(t + 2\Delta t) - \bar{\ell}(t + \Delta t) = \ell_\infty e^{-kt}(1 - e^{-k\Delta t})e^{-k\Delta t}. \qquad (8)$$

Dividindo (7) por (8) temos

$$\frac{\bar{\ell}(t + \Delta t) - \bar{\ell}(t)}{\bar{\ell}(t + 2\Delta t) - \bar{\ell}(t + \Delta t)} = e^{k\Delta t},$$

donde obtemos, finalmente,

$$\hat{k} = \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{\bar{\ell}(t + \Delta t) - \bar{\ell}(t)}{\bar{\ell}(t + 2\Delta t) - \bar{\ell}(t + \Delta t)}, \qquad (9)$$

que é o modelo que estamos propondo para estimar o parâmetro k em função dos comprimentos médios tomados em épocas diferentes de mensuração.

A seguir apresentamos o modelo que estima o parâmetro ℓ_∞. Para isto, consideremos as equações

$$\ell_\infty - \bar{\ell}(t) = \ell_\infty e^{-kt}, \qquad (10)$$

$$\ell_\infty - \bar{\ell}(t + \Delta t) = \ell_\infty e^{-kt} e^{-k\Delta t} \qquad (11)$$

$$\ell_\infty - \bar{\ell}(t + 2\Delta t) = \ell_\infty e^{-kt} e^{-k2\Delta t}, \qquad (12)$$

obtidas de (4), (5) e (6) por simples manipulações algébricas.

Dividindo (10) por (11) e (11) por (12) obtemos, respectivamente,

$$\frac{\ell_\infty - \bar{\ell}(t)}{\ell_\infty - \bar{\ell}(t + \Delta t)} = e^{k\Delta t}$$

e

$$\frac{\ell_\infty - \bar{\ell}(t + \Delta t)}{\ell_\infty - \bar{\ell}(t + 2\Delta t)} = e^{k\Delta t}$$

e portanto,

$$\frac{\ell_\infty - \bar{\ell}(t)}{\ell_\infty - \bar{\ell}(t + \Delta t)} = \frac{\ell_\infty - \bar{\ell}(t + \Delta t)}{\ell_\infty - \bar{\ell}(t + 2\Delta t)}$$

que é equivalente a

$$\ell_\infty(2\bar{\ell}(t + \Delta t) - \bar{\ell}(t + 2\Delta t) - \bar{\ell}(t)) =$$

$$\bar{\ell}^2(t + \Delta t) - \bar{\ell}(t)\bar{\ell}(t + 2\Delta t),$$

que nos dá

$$\hat{\ell}_\infty = \frac{\bar{\ell}^2(t + \Delta t) - \bar{\ell}(t)\bar{\ell}(t + 2\Delta t)}{2\bar{\ell}(t + \Delta t) - \bar{\ell}(t + 2\Delta t) - \bar{\ell}(t)}. \tag{13}$$

Esse é o modelo que dá a estimativa do parâmetro ℓ_∞.

Seja t_p a idade que o peixe tinha na época da primeira mensuração e seja t_r a idade relativa nas épocas de mensurações, em função da idade suposta igual a 0, na primeira mensuração. Então

$$t = t_p + t_r$$

representa a idade correta na época de mensuração. Assim, podemos escrever

$$\bar{\ell}(t) = \ell_\infty(1 - e^{-k(t_p + t_r)}),$$

que é equivalente a

$$\frac{\ell_\infty - \bar{\ell}(t)}{\ell_\infty} = e^{-k(t_p + t_r)}. \tag{14}$$

É fácil ver que

$$\frac{\ell_\infty - \bar{\ell}(t)}{\ell_\infty} =$$

$$= \frac{(\bar{\ell}(t + \Delta t) - \bar{\ell}(t))^2}{\bar{\ell}^2(t + \Delta t) - \bar{\ell}(t)\bar{\ell}(t + 2\Delta t)}$$

e, portanto,

$$\frac{(\bar{\ell}(t + \Delta t) - \bar{\ell}(t))^2}{\bar{\ell}^2(t + \Delta t) - \bar{\ell}(t)\bar{\ell}(t + 2\Delta t)} =$$

$$= e^{-k(t_p + t_r)},$$

donde obtemos

$$\hat{t}_p = -\frac{1}{k} ln \frac{(\bar{\ell}(t + \Delta t) - \bar{\ell}(t))^2}{\bar{\ell}^2(t + \Delta t) - \bar{\ell}(t)\bar{\ell}(t + 2\Delta t)},$$

para $t_r = 0$. (15)

A fórmula acima dá a estimativa da idade do peixe na época da primeira mensuração.

Resultados análogos podem ser vistos em GOMES & PIMENTEL (1977), no caso particular em experimentos de adubação.

Exemplo ilustrativo. Imaginemos um ensaio em que $\bar{\ell}(t) = 4,0$ seja o comprimento médio de certo peixe numa certa época de medida, $\bar{\ell}(t + 1) = 6,4$ e $\bar{\ell}(t + 2) = 8,0$ os comprimentos nas épocas seguintes de mensuração. Aqui, estamos admitindo $\Delta t = 1$ ano. Dessa forma, a equação (9) nos dá

$$\hat{k} = ln \frac{6,4 - 4,0}{8,0 - 6,4} = ln \frac{2,4}{1,6} = 0,4,$$

que é a taxa de crescimento desse animal. Para calcular o crescimento total máximo assintótico, utilizamos a equação (13). Substituindo diretamente os valores dados, obtemos

$$\hat{\ell}_\infty = \frac{(6,4)^2 - (4,0)(8,0)}{2(6,4) - 8,0 - 4,0} = 11,2.$$

A equação que acompanha o crescimento desse animal é, portanto,

$$\ell(t) = 11,2(1 - e^{-0,4t}),$$

cujo esboço gráfico apresentamos na figura 2.

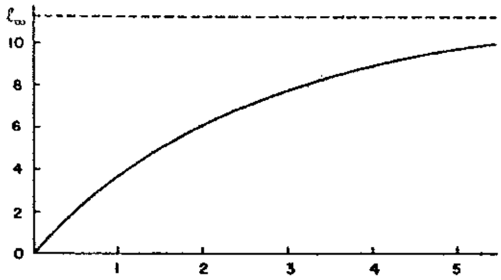

fig. 2

Para determinar a idade desse animal na época da primeira mensuração usamos a equação (15). Assim, temos

$$\hat{t}_p = -\frac{1}{0,4} \ln \frac{(6,4 - 4,0)^2}{(6,4)^2 - (4,0)(8,0)}$$

$$= -\frac{1}{0,4} \ln \frac{5,7}{8,9} = 1,1 .$$

Isto significa dizer que a idade desse animal na época da primeira mensuração era 1,1 ano.

Para traçar o gráfico da equação que relaciona $\ell(t)$ e $\ell(t + \Delta t)$, primeiro determinamos os parâmetros m e n que aparecem na equação (3). Tomamos t = 1,1. Isto nos dá m = 0,6 e n = 3,7. A equação (3) tem, portanto, a forma particular $\ell(t + \Delta t) = 0,6\,\ell(t) + 3,7$. O gráfico tem o aspecto que ilustramos na figura 3.

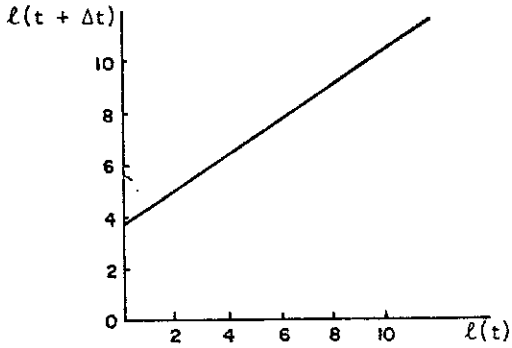

fig. 3 - Curva que relaciona $\ell(t)$ e $\ell(t + \Delta t)$ (transformação FORD-WELFORD (1946) da curva de crescimento, em comprimento).

LITERATURA CITADA

BERTALANFFY, L. von; 1938. A quantitative theory of organic growth. *Hum. Biol.*, 10(2): 181-213.

GOMES, F. P. & NOGUEIRA, I. R.; 1977. *Análise Matemática*. São Paulo, Ed. "Ave Maria" Ltda, 183 p.

SANTOS, E. P. dos; 1978. *Dinâmica de populações Aplicada à Pesca e à Piscicultura*. São Paulo, Ed. Universidade de São Paulo, 129 p.

WELFORD, L. A. A.; 1946. New graphic method of describing the growth of animals. *Biol. Bull.* 90(2): 141-147.

ABSTRACT

In the current literature one can find several methods which give good estimates for the von Bertalanffy's equation parameters. This equation is used to study population growth in terms of length. In the present study a population of fish was included and measures of growth (bodylength) were taken at successive time intervals. The data were used to construct a mathematical model where the above cited equation's parameters were estimated.

INSTRUÇÕES AOS AUTORES

1. São aceitos para publicação trabalhos técnico-científicos originais ainda não publicados nem encaminhados a outra revista para o mesmo fim.

2. Uma vez aceitos, os trabalhos não poderão ser reproduzidos, mesmo parcialmente, sem o consentimento expresso da revista Caatinga.

3. São de exclusiva responsabilidade dos autores as opiniões e conceitos emitidos nos trabalhos. Contudo, à Comissão Editorial reserva-se o direito de sugerir ou solicitar modificações aconselháveis ou necessárias.

4. Na elaboração dos originais deverão ser atendidas as seguintes normas:

   a) os trabalhos devem ser apresentados em duas vias (original e cópia) datilografadas em uma só face do papel em espaço duplo e com margens de, no mínimo, 2 cm; o texto será escrito corridamente sem intercalação de tabelas e figuras que, feitas em folhas separadas, serão anexadas ao final do trabalho; as folhas, ordenadas em texto, legendas, tabelas e figuras, serão numeradas seguidamente;

   b) no rodapé da primeira página deverão constar a qualificação profissional e endereço postal completos do(s) autor(es);

   c) citações bibliográficas serão feitas pelo sistema "nome e ano"; trabalho de dois autores serão citados pelos nomes de ambos, e de três ou mais, pelo nome do primeiro seguido de "*et al.*", mais o ano; se dois trabalhos não se distinguirem por esses elementos, a diferenciação será feita pelo acréscimo de letras minúsculas ao ano; todos os trabalhos citados terão suas referências completas incluídas na lista própria (LITERATURA CITADA), inclusive os que tenham sido consultados indiretamente; no texto não se fará menção do trabalho que tenha servido como fonte; este esclarecimento será acrescentado apenas ao final da respectiva referência, na forma: (Citado por ..., 19 ...); a referência do trabalho que tenha servido de fonte será incluída na lista uma só vez;

   d) será evitada a duplicidade de apresentação de dados, isto é, a apresentação simultânea em gráficos e tabelas, cabendo ao autor optar por uma delas.

5. Os trabalhos devem ser organizados sempre que possível, em TÍTULO, SINOPSE, INTRODUÇÃO, MATERIAL E MÉTODOS, RESULTADOS, DISCUSSÕES, CONCLUSÕES (ou combinações destes três últimos), AGRADECIMENTOS, LITERATURA CITADA e ABSTRACT.

6. A seção LITERATURA CITADA, que só incluirá os trabalhos citados no texto, tabelas ou gráficos e os que tenham servido como fonte de consulta indireta, deverá ser ordenada alfabeticamente, registrando os nomes de todos os autores e o título de cada publicação, e apresentada conforme o mais recente volume desta revista. As abreviações de nomes de revistas devem ser feitas de conformidade com as usadas pelos "abstracting journals". Em caso de dúvida é preferível dar a referência por extenso, encarregando-se, nestes casos, a Comissão Editorial da revista Caatinga de abreviá-las.

7. O ABSTRACT, resumo em inglês, deverá incluir a tradução do título do trabalho.

8. Outros pormenores para a confecção de trabalhos a serem enviados à revista Caatinga são fornecidos por requisição dos interessados.

9. Aos autores serão fornecidas 25 separatas de cada trabalho publicado. Separatas adicionais devem ser solicitadas com antecedência e terão preço de custo.